



گزینه ۳

۱

$$|\Sigma \vec{F}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_1| + |\vec{F}_1| \Rightarrow \Sigma \vec{F}_{\max} = 15 \text{ N}$$

در مورد برآیند سه بردار (نیرو) می‌توان گفت:

بیشینه: در حالتی رخ می‌دهد که بردارها در یک جهت باشند.

کمینه: اگر سه بردار تشکیل مثلث بدهند. (مجموع اندازه هر دو بردار از بردار سوم بیشتر شود)

می‌توان نتیجه گرفت که کمترین مقدار برآیند این بردارها می‌تواند صفر باشد. که در این سؤال این شرط برقرار است. بنابراین:

$$\Sigma \vec{F}_{\min} = 0$$

باتوجه به توضیحات می‌توان گفت:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{\max} &= m a_{\max} \Rightarrow 15 = 1 \times a_{\max} \Rightarrow a_{\max} = 15 \text{ m/s}^2 \\ \vec{F}_{\min} &= m a_{\min} \Rightarrow 0 = 1 \times a_{\min} \Rightarrow a_{\min} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{\max} - a_{\min} = 15$$

گزینه ۴

۲

$$M = \rho V \Rightarrow g = G \frac{M}{R^2} = \frac{G \rho V}{R^2} = \frac{G \rho \frac{4}{3} \pi R^3}{R^2} \Rightarrow g = \frac{4}{3} \pi G \rho R$$

$$\frac{g_x}{g_e} = \frac{\frac{4}{3} \pi G \rho_x R_x}{\frac{4}{3} \pi G \rho_e R_e} = 2 \times 6 = 12$$

ابتدا با فرض اینکه نیروی F' روی سطحی که نیروی اصطکاک آن f_k باشد جسم را به حرکت درمی‌آورد. رابطه انرژی جنبشی برحسب زمان را به دست می‌آوریم و سپس برای حالت فرمول مقایسه‌ای را پیاده می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} F' - f_k &= ma \\ v &= at + \underbrace{v_0}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \left(\frac{F' - f_k}{m} \right) t$$

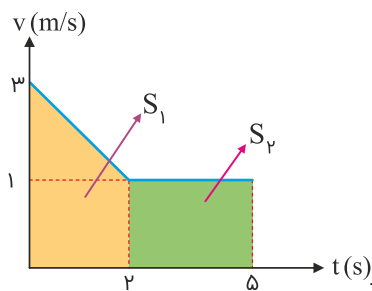
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left[\frac{F' - f_k}{m} \right]^2 t^2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حالت ۱: } K &= \frac{1}{2}m \left[\frac{F - 0}{m} \right]^2 \times 4 \\ \text{حالت ۲: } \frac{K}{2} &= \frac{1}{2}m \left[\frac{2F - 0/5F}{m} \right]^2 \times t^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\div} 2 = \frac{F^2 \times 4}{\frac{9}{4}F^2 t^2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{16}{9t^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{4}{3t} \Rightarrow t = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

طبق رابطه $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ اندازه نیروی گرانش با مجذور فاصله دو جسم نسبت عکس دارد و در فاصله بسیار زیاد به صفر میل می‌کند.

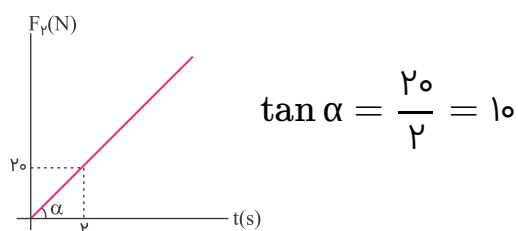
با توجه به رابطه $P = mv$ ابتدا نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم: می‌دانیم مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، جابه‌جایی است.



$$\left. \begin{aligned} S_1 &= (3 + 1) \times \frac{2}{2} = 4 \\ S_2 &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = S_1 + S_2 = 13 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{13}{5} = 2.6 \text{ m/s}$$

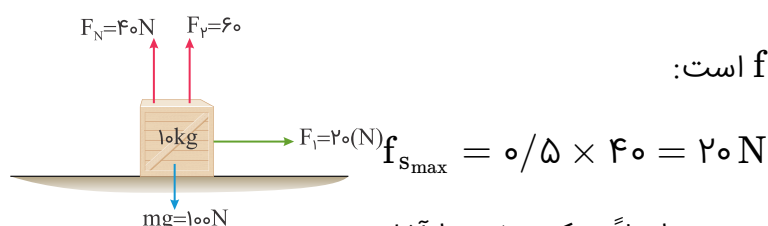
باتوجه به شیب نمودار، اندازه نیروی F_2 را در لحظه $t = 6$ s به دست می‌آوریم:



پس:

$$10 = \frac{F_2}{6} \Rightarrow F_2 = 60 \text{ N}$$

طرح‌واره نیروهای وارد بر جعبه را در لحظه $t = 6$ s رسم می‌کنیم:

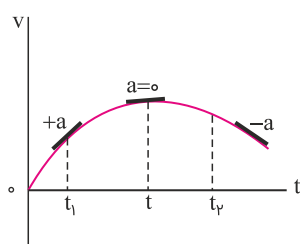


در این لحظه $f_{s\max} = \mu_s F_N$ برای جعبه برابر $f_{s\max} = 0.5 \times 40 = 20 \text{ N}$ است:

در نهایت مشاهده می‌کنیم پیشران $f_{s\max} = F$ پس جعبه اصلاً حرکت خود را آغاز نمی‌کند و برآیند نیروهای وارد بر آن برابر صفر خواهد بود.

شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ برابر با شتاب حرکت است و تغییرات نیروی خالص تابع تغییرات شتاب متحرک است. ($F = ma$)

از t_1 تا t اندازه شتاب در حال کاهش و از t تا t_2 اندازه شتاب در حال افزایش است.



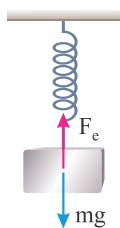
طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، همان‌دازه با نیرویی است که سطح به جسم وارد می‌کند. نیروی سطح بر جسم برآیند دو نیروی F_N و اصطکاک جنبشی است. (چون جسم در اینجا حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک جنبشی بر آن وارد می‌شود). بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جسم برابر است با:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow{F_N = mg = 40 \text{ N}} 50 = \sqrt{40^2 + f_k^2} \Rightarrow f_k = 30 \text{ N}$$

حال با استفاده از قانون دوم نیوتون، بزرگی نیروی F را حساب می‌کنیم:

$$F - f_k = ma \Rightarrow F - 30 = 4 \times 2 \Rightarrow F = 38 \text{ N}$$

در حالت اول:



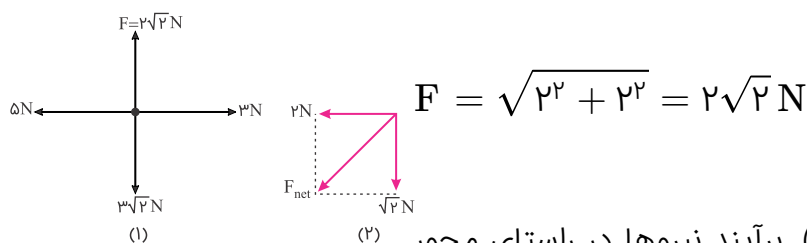
$$F_e = mg \Rightarrow mg = 200(65 - 50) \times 10^{-2} = 30$$

در حالت دوم:

$$F'_e - mg = ma \Rightarrow K\Delta x' - mg = ma$$

$$\Rightarrow 200(60 - 50) \times 10^{-2} - 30 = 3a \Rightarrow -10 = 3a \Rightarrow a = -\frac{10}{3} \text{ m/s}^2$$

نیروهای ۲ نیوتونی بر هم عمودند و بزرگی برآیند آن‌ها از رابطه فیثاغورس به دست می‌آید:

این نیرو در جهت محور y قرار می‌گیرد (شکل ۱). برآیند نیروها در راستای محور y برابر است با:

$$F_y = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ N}$$

و در راستای محور x :

$$F_x = 5 - 3 = 2 \text{ N}$$

 F_x و F_y بر هم عمودند (شکل ۲)، پس:

$$F_{\text{net}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6} \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow \sqrt{6} = 2a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m/s}^2$$

گام اول: بردار $\vec{F}_{\text{net}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = -2\vec{i} + 6\vec{j}$$

گام دوم: بردار شتاب را از رابطه $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{a} = \frac{-2\vec{i} + 6\vec{j}}{2} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

بنابراین گزینه‌های "۱" و "۳" نمی‌توانند درست باشند.

گام سوم: از رابطه $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$ سرعت را پس از ۳ s به دست می‌آوریم:

$$\vec{v} = (-\vec{i} + 3\vec{j}) \times 3 = -3\vec{i} + 9\vec{j}$$

هنگامی که بار اول نخ را به آرامی پایین می‌کشیم و به تدریج نیرو را افزایش می‌دهیم، نیروی وزن وزنه در راستای پایین به ما کمک می‌کند و در نهایت نخ از بالای وزنه پاره می‌شود؛ اما در بار دوم وقتی به صورت ضربه‌ای و در یک لحظه نخ را به پایین می‌کشیم، باتوجه به قانون لختی، وزنه با تغییر ناگهانی سرعت مخالفت می‌کند و نیروی لحظه‌ای باعث می‌شود نخ از پایین وزنه پاره شود.

$$F_A = F_B \Rightarrow \frac{GmM_A}{R_A^2} = \frac{GmM_B}{R_B^2}$$

$$M_A = \frac{1}{8}M_B \Rightarrow \frac{\frac{1}{8}M_B}{R_A^2} = \frac{M_B}{R_B^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1/8}{R_A^2} = \frac{1}{R_B^2} \Rightarrow R_A = \frac{1}{\sqrt{8}}R_B$$

$$R_A + R_B = 3800 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}R_B + R_B = 3800 \Rightarrow R_B = 2000 \text{ km}, \quad R_A = 1800 \text{ km}$$

$$R_B - R_A = 2000 - 1800 = 200 \text{ km}$$

اولاً: چون نمودار تندی بر حسب زمان است، نباید نمودار در بخش‌های منفی رسم شود. (رد گزینه‌های "۱" و "۳")
 ثانیاً: اگر چتر باز یک بار قبل از باز کردن چتر و یک بار پس از باز کردن چتر به تندی حدی رسیده باشد پاسخ ما گزینه "۴" خواهد بود.
 نکته: در تندی حدی شیب خط مماس بر منحنی نمودار صفر است.

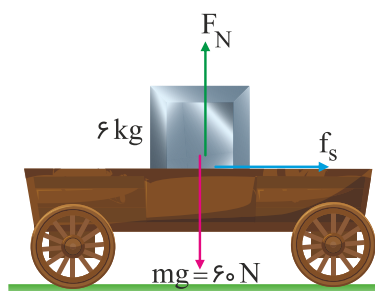
قانون دوم نیوتون را برای حالات عنوان شده می‌نویسیم:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} \Rightarrow m_1 = \frac{F}{a_1}$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} \Rightarrow m_2 = \frac{F}{a_2}$$

$$\left. \begin{aligned} a' &= \frac{2F}{m_1 + m_2} \\ a'' &= \frac{2F}{m_1 - m_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a'}{a''} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{F}{a_1} - \frac{F}{a_2}}{\frac{F}{a_1} + \frac{F}{a_2}} = \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}$$

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را در راستای قائم و راستای افقی می‌نویسیم:



$$\begin{cases} F_N = mg = 60 \\ f_s = ma \Rightarrow f_s = 6 \times 2 = 12 \text{ N} \end{cases}$$

نیرویی که گاری به جسم وارد می‌کند، برآیند دو نیروی F_N و f_s است، پس:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = \sqrt{60^2 + 12^2} = 12\sqrt{25 + 1} = 12\sqrt{26} \text{ N}$$

نیرویی که جسم به گاری وارد می‌کند، واکنش نیروی R است. پس اندازه آن با R برابر است.

نیرویی که دو نفر به هم وارد می‌کنند با هم برابر است و طبق قانون دوم نیوتن ($F = ma$) شتاب حرکت با جرم نسبت وارون دارد. شخص سبک‌تر با شتاب بیشتری حرکت می‌کند و در زمان مساوی، مسافت بیشتری را طی می‌کند ($\Delta x = \frac{1}{2}at^2$).

بنابراین شخص سبک‌تر در فاصله نقطه ۰ تا A به شخص سنگین‌تر خواهد رسید.

$$\frac{g_x}{g_o} = \frac{\frac{GM_e}{(R_e + nR_e)^2}}{\frac{GM_e}{R_e^2}} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{R_e}{(n+1)R_e} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{n+1} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4 = 3n + 3 \Rightarrow n = \frac{1}{3}$$

طبق قانون دوم نیوتون $\vec{F} = m\vec{a}$ دو بردار نیروی برآیند (خالص) وارد بر جسم و بردار شتاب جسم هم‌علامت و هم‌جهت هستند ضمناً بردار شتاب جسم نیز طبق رابطه

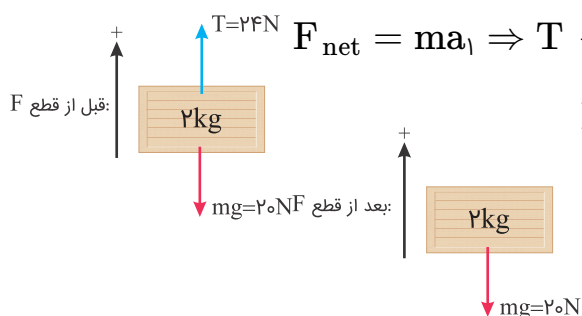
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

با بردار تغییرات سرعت جسم هم‌علامت و هم‌جهت است و نه الزاماً با بردار سرعت جسم پس عبارت (الف) صحیح ولی عبارت (ب) غلط است. عبارت (پ) نیز الزاماً صحیح نمی‌باشد. مثلاً در چرخش جسمی با تندی ثابت حول مرکز یک دایره، هرچند تندی جسم ثابت است ولی چون جهت آن تغییر کرده پس بردار سرعت نیز متغیر بوده و حرکت شتابدار است در نتیجه برآیند نیروها صفر نمی‌باشد.

عبارت (ت) نیز غلط است مثلاً در حرکت ماه به دور زمین، برآیند نیروهای وارد بر ماه به سمت کره زمین است ولی راستای حرکت ماه در مداری حول زمین صورت می‌پذیرد.

جمله (ج) صحیح ولی جمله (ث) غلط است چراکه هرچند نیروهای کنش و واکنش هم‌اندازه و هم‌راستا و هم‌نوع هستند ولی چون به دو جسم مختلف وارد می‌شوند نمی‌توان از آن‌ها برآیند گرفت.

گام اول: ابتدا جهتی را برای محور در نظر می‌گیریم و قبل و بعد از قطع نخ، شتاب جسم را به دست می‌آوریم:



$$F_{\text{net}} = ma_1 \Rightarrow T - mg = ma_1 \Rightarrow 24 - 20 = 2a \Rightarrow a_1 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -mg = ma_2 \Rightarrow a_2 = -10 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: بردار سرعت جسم در لحظه $t = 2 \text{ s}$ و مسافت طی شده تا $t = 2 \text{ s}$ برابر است با:

$$v_{2s} = a_1 t + v_0 = 2 \times 2 + 0 = 4 \text{ m/s}$$

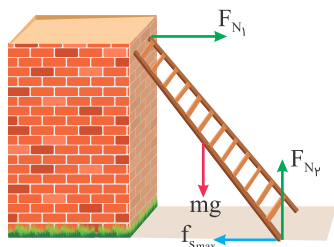
$$\Delta x_{(0,2s)} = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \times 2 \times (2)^2 + 0 = 4 \text{ m}$$

گام سوم: پس از $t = 2 \text{ s}$ ، شتاب جسم ثابت و برابر -10 m/s^2 است و جابه‌جایی جسم برای رسیدن به سطح زمین -4 m است. تندی جسم در لحظه برخورد به زمین برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 4^2 = 2(-10)(-4) \Rightarrow v^2 = 96$$

$$\Rightarrow |v| = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ m/s}$$

باتوجه به متعادل بودن سیستم:



$$\begin{cases} F_{N_2} = mg \\ F_{N_1} = f_{s\max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{N_2} = 400 \text{ N} \\ F_{N_1} = 0.75 \times 400 = 300 \text{ N} = f_{s\max} \end{cases}$$

نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند برابر است با:

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_{N_2}^2} \Rightarrow R = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ N}$$

نیرویی که دیوار به نردبان وارد می‌کند برابر F_{N_1} است. پس داریم:

$$\frac{R}{F_{N_1}} = \frac{500}{300} = \frac{5}{3}$$

باتوجه به نمودار سرعت- زمان، حرکت متحرک در بازه $(0, 4 \text{ s})$ تندشونده و در بازه $(4 \text{ s}, 8 \text{ s})$ کندشونده است. بردار شتاب متحرک در این بازه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$a_{(0,4 \text{ s})} = \frac{v_{4 \text{ s}} - v_0}{4 - 0} = \frac{-4 - 0}{4} = -1 \text{ m/s}^2$$

$$a_{(4 \text{ s}, 8 \text{ s})} = \frac{v_{8 \text{ s}} - v_{4 \text{ s}}}{8 - 4} = \frac{0 - (-4)}{8 - 4} = +1 \text{ m/s}^2$$

بر جسم نیروی فنر به سمت بالا و نیروی وزن به سمت پایین وارد می‌شود. برای هر حالت قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} (+F_e)\vec{j} + (-mg)\vec{j} = m\vec{a}_1 \\ (+F_e)\vec{j} + (-mg)\vec{j} = m\vec{a}_2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{F_e=kx} \begin{cases} (1000x_1)\vec{j} - 40\vec{j} = 4(-1)\vec{j} \Rightarrow x_1 = 0/036 \text{ m} = 3/6 \text{ cm} \\ (1000x_2)\vec{j} - 40\vec{j} = 4(+1)\vec{j} \Rightarrow x_2 = 0/044 \text{ m} = 4/4 \text{ cm} \end{cases}$$

بنابراین اختلاف طول فنر در این دو حالت برابر $1/2 \text{ cm}$ است.

در بازه زمانی صفر تا $0/5$ ثانیه، شتاب برابر با $a_1 = \frac{F}{m} = \frac{10}{2} = 5 \text{ m/s}^2$ و در بازه $0/5$ تا 1 ثانیه شتاب $a = \frac{F}{m} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/s}^2$ است.

در بازه اول تغییرات سرعت $\Delta v_1 = a_1 \Delta t_1 = 2/5 \text{ m/s}$ است.

در بازه دوم برابر با $v_2 = a_2 \Delta t_2 = 10 \times 0/5 = 5 \text{ m/s}$ است.

باتوجه به اینکه سرعت اولیه جسم صفر است، سرعت نهایی متحرک بعد از گذشت 1 ثانیه برابر است با:

$$v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2/5 + 5 = 7/5 \text{ m/s}$$

$$\Delta P = F \cdot \Delta t \xrightarrow[\text{از حال سکون}]{v_0=0} P_0 = 0 \Rightarrow P_1 = F \cdot \Delta t, P_2 = 2F/3 \Delta t$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{P_2^2}{2m_2}}{\frac{P_1^2}{2m_1}} = \frac{(6P_1)^2}{\frac{4m_1}{m_1}} = \frac{36}{4} = 9$$

در هر دو حالت که چتر باز به تندی حدی می‌رسد، نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن چتر باز هم‌اندازه است. پس در هر دو حالت بزرگی نیروی مقاومت هوا با هم برابر است. (رد گزینه "۴") پس از باز کردن چتر، مساحت تماس با هوا بیشتر می‌شود، بنابراین ناگهان نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد و حرکت چتر باز کند می‌شود و تندی چتر باز کاهش می‌یابد. با کاهش تندی چتر باز، بزرگی نیروی مقاومت هوا و برآیند نیروهای وارد بر آن نیز کاهش می‌یابد. طبق رابطه $F_{\text{net}} = ma$ ، بزرگی شتاب وارد بر چتر باز نیز کم می‌شود (رد گزینه "۱"). چون در مدت Δt حرکت چتر باز کندشونده است، بردار سرعت و شتاب در این بازه در خلاف جهت هم هستند. (گزینه "۳" درست است). در بازه Δt حرکت چتر باز کندشونده است در نتیجه v_2 کمتر از v_1 می‌باشد. (رد گزینه "۲")